Adı Soyadı : CEVAP ANAHTARI **05.06.2018**
Numara :

MAT 104 LİNEER CEBİR II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

SORU 1: Bir $A: V \to V$ lineer dönüşümünde her bir $\alpha \neq 0$ vektörüne $A(\alpha) = \lambda\alpha$ olacak şekilde bir tek λ karakteristik değeri karşılık gelir, ispatlayınız.

SORU 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. $\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ dir, ispatlayınız.

SORU 3:

$$\begin{aligned} 2x + z &= 1 \\ 2x + 4y - z &= 1 \\ -x + 8y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözünüz.

SORU 4:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 7 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi için

a) A nın eki (adjointi) $\widetilde{A}$ yı hesaplayınız.
b) A nın ekini kullanarak A^{-1} matrisini bulunuz.

SORU 5: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ olmak üzere σ, τ için

a) $\sigma\tau^2$ çarpımını hesaplayınız.
b) σ^{-1} permütasyonunu yazınız ve işaretini bulunuz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

1- Kabul edelim ki aynı bir $\vec{\alpha} \neq 0$ karakteristik vektörüne farklı iki λ_1, λ_2 karakteristik değerleri karşılık gelsin. O zaman

$$A(\vec{\alpha}) = \lambda_1 \vec{\alpha}$$
$$A(\vec{\alpha}) = \lambda_2 \vec{\alpha}$$

yazılır. Buradan dan

$$\lambda_1 \vec{\alpha} = A(\vec{\alpha}) = \lambda_2 \vec{\alpha}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \vec{\alpha} = \lambda_2 \vec{\alpha}$$
$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{\alpha} = \vec{0}$$

elde edilir. Bu ise, $\vec{\alpha} \neq 0$ olduğundan $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ olmasını yani $\lambda_1 = \lambda_2$ olmasını gerektirir.

2- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisi için $\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ ve $\vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$

vektörleri (veya sütun matrislerini) belirleyelim. $\mathbb{R}^2$ uzayının standart bazları $\vec{e}_1 = (1,0)$ ve $\vec{e}_2 = (0,1)$ olmak üzere $\vec{\alpha}_1$ ve $\vec{\alpha}_2$ vektörleri

$$\vec{\alpha}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2$$
$$\vec{\alpha}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$$

olacak şekilde $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ lerin lineer birleşimi şeklinde yazılır. O halde

$$\det A = \det[\alpha_1, \alpha_2] = \det[a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \, , \, a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2]$$

Determinant fonk. n-lineer

$$= a_{11}a_{12}\underbrace{\det[\vec{e}_1, \vec{e}_1]}_{=0} + a_{11}a_{22}\det[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$$
$$+ a_{21}a_{12}\det[\vec{e}_2, \vec{e}_1] + a_{21}a_{22}\underbrace{\det[\vec{e}_2, \vec{e}_2]}_{=0}$$

Deter. fonk. alterne

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

3- Verilen lineer denklem sisteminde bilinmeyen sayısı $n=3$, denklem sayısı $m=3$ ve homojen olmayan bir sistemdir. Bu sistemin katsayılar matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+\,1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 60 \neq 0 \text{ dır.}$$

Yukarıdaki verilere göre, $m=n$ ve $\det A \neq 0$ olduğundan bu sistemin çözümü Cramer metoduyla bulunur.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{60} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{60} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{60} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \quad \text{bulunur.}$$

4- a) $A=\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 7 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin eki $\tilde{A}$ olmak üzere

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$, $\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16$, $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 33$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 38$$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -31$ şeklinde A nın kofaktörleri bulunur. Buradan,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & -16 & 2 \\ -15 & -10 & 5 \\ 33 & 38 & -31 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -15 & 33 \\ -16 & -10 & 38 \\ 2 & 5 & -31 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

b) Bir A matrisinin A^{-1} tersi bulunurken

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}$$ eşitliği kullanılabilir:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 7 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$$

$= -60$ 'dır. O zaman

$$A^{-1} = \frac{1}{-60} \begin{bmatrix} -6 & -15 & 33 \\ -16 & -10 & 38 \\ 2 & 5 & -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 & 1/4 & -11/20 \\ 4/15 & 1/6 & -19/30 \\ -1/30 & -1/12 & 31/60 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

5- a) $\sigma\tau^2 = \sigma\tau\tau$ yazılabileceğinden

$$\sigma\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ dır.

b) $$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 6\ 3)(2\ 7\ 4\ 5)$$

$$= (1\ 3)(1\ 6)(2\ 5)(2\ 4)(2\ 7)$$

traspozisyonların çarpımı şeklinde yazılır. Bu traspozisyonların sayısı 5 olduğundan $s(\sigma^{-1}) = -1$ elde edilir.